13/12/2016

Ιδιότητες Συνάρτησης Γάμμα:

1) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2) Αναλυτική συνέχιση της συνάρτησης Γάμμα:

Για $z=-n$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ ως εξής: $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{-1/2} = -2\,\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-5/2) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

3) Τύπος διπλασιασμού (Ηω η απόδειξη)

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

4) $$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

⇒ Η σχέση της συνάρτησης Βήτα με την συνάρτηση Γάμμα είναι η εξής:

$$B(\omega,n) = \frac{\Gamma(\omega)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\omega+n)}, \quad \omega,n>0$$

ΑΠΟΔ

$$\Gamma(\omega) = 2\int_0^{\infty} x^{2\omega-1} e^{-x^2}\,dx$$

$$\Gamma(\omega)\,\Gamma(n) = 4\int_0^{\infty} x^{2\omega-1} e^{-x^2}\,dx \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2}\,dy = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2\omega-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Στη συνέχεια, κάνω αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\Gamma(\omega)\,\Gamma(n) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} (r\cos\theta)^{2\omega-1} (r\sin\theta)^{2n-1} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\omega-1} (\sin\theta)^{2n-1}\,d\theta\right) 2\int_0^{\infty} r^{2\omega-1+2n\cancel{-1+1}} e^{-r^2}\,dr$$

$$= \underbrace{2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2\omega-1} (\sin\theta)^{2n-1}\,d\theta\right)}_{B(\omega,n)} \underbrace{2\int_0^{\infty} r^{2(\omega+n)-1} e^{-r^2}\,dr}_{\Gamma(\omega+n)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Gamma(\omega)\Gamma(n) = B(\omega,n)\,\Gamma(\omega+n) \Rightarrow B(\omega,n) = \dfrac{\Gamma(\omega)\Gamma(n)}{\Gamma(\omega+n)}, \ \omega, n > 0$

HW: Να αποδείξετε τον τύπο διπλασιασμού της Γάμμα:

$$2^{2p-1}\,\Gamma(p)\,\Gamma(p+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $B(p+1/2, 1/2) = \dfrac{\Gamma(p+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(p+1)}$ και επίσης

$$B(p+1/2, p+1/2) = \frac{\Gamma^2(p+1/2)}{\Gamma(2p+1)}$$

Εφαρμογές της Μαθηματικής Φυσικής

Σειρές Fourier

Π.Σ.Τ: $\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι $y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, \dots$

Δηλαδή, κάθε συνάρτηση : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Leftrightarrow C_n = \dfrac{\langle y_n | f \rangle}{\|y_n\|^2}$

Σειρά συνημιτόνων

Π.Σ.Τ. : $\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι $y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ και για κάθε συνάρτηση

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Leftrightarrow C_0 = \dfrac{\langle y_0 | f \rangle}{\|y_0\|^2}$

$C_n = \dfrac{\langle y_n | f \rangle}{\|y_n\|^2}$

Πλήρης σειρά

Π.Σ.Τ. : $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) \\ y'(0) = y'(L) \end{cases}$

Θέτουμε $\lambda = k^2$. Τότε οι λύσεις είναι της μορφής:

$y(x) = Ae^{-kix} + Be^{kix} = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$

$\boxed{Ae^{-kx} + Be^{kx} = C_1 \cosh(ax) + C_2 \sinh(ax)}$: Σημείωση

με συνοριακές συνθήκες : $y(0)=c_1 = c_1\cos(kL)+c_2\sin(kL)=y(L)$
$y'(0)=c_2\cancel{k}=-c_1\cancel{k}\sin(kL)+c_2\cancel{k}\cos(kL)=y'(L)$

Δηλαδή:
$c_1(\cos(kL)-1)+c_2\sin(kL)=0$
$c_1(-\sin(kL))+c_2(\cos(kL)-1)=0$

Για να έχουμε μη μηδενική λύση ζητάμε: $\begin{vmatrix}\cos(kL)-1 & \sin(kL)\\ -\sin(kL) & \cos(kL)-1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{2n\pi}{L}$

Δηλαδή, $\lambda=k^2=\dfrac{4n^2\pi^2}{L^2}$ και στην ίδια ιδιοτιμή αντιστοιχούν δύο ιδιοσυναρτήσεις:

$\begin{cases} y_n^{(1)} = \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right)\\ y_n^{(2)} = \sin\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right)\end{cases}$, το φαινόμενο αυτό ονομάζεται εκφυλισμός

Όμως, για την συγκεκριμένη περίπτωση, $\langle y_n^{(1)} | y_n^{(2)}\rangle = 0$, δηλαδή:
$\int_0^L \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right)\sin\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right)dx=0$, δηλαδή τα δύο ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Άρα, η $f(x)=a_0y_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_ny_n^{(1)}+b_ny_n^{(2)}\right)$ με $a_0=\dfrac{\langle y_0|f\rangle}{\|y_0\|^2}$, $a_n=\dfrac{\langle y_n^{(1)}|f\rangle}{\|y_n^{(1)}\|^2}$,

$b_n=\dfrac{\langle y_n^{(2)}|f\rangle}{\|y_n^{(2)}\|^2}$

Εξίσωση Schrödinger

Χαμιλτονιανή εξίσωση (περιγράφει πώς διατηρείται η ενέργεια)

Η εξίσωση Schrödinger έδωσε μεγάλη ώθηση στην σύγχρονη φυσική και ιδιαίτερα στην κβαντική Φυσική: $i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi$
$=\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(\bar{r})$

όπου H είναι ο διαφορικός τελεστής $H=\dfrac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2+V(\bar{r})$, $V(\bar{r})=V(x,y,z)$
(2ης τάξης ως προς χωρικές μεταβλητές, 1ης τάξης ως προς χρονικές μεταβλητές)

Πρόκειται για μια μερική διαφορική εξίσωση, γραμμική Δ.Ε.

(* Εξισώσεις Maxwell: ενοποίηση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου *)

$V(\bar{r})$: το δυναμικό υπό την επίδραση του οποίου κινείται το στοιχειώδες σωματίδιο.

Το στοιχειώδες σωματίδιο, έχει μάζα m, και το $\hbar$ είναι μια σταθερά, όπου $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h: σταθερά Planck $= 6.625 \times 10^{-34}$ kg m²/s.

Φυσική σημασία: Η λύση της εξίσωσης Schrödinger μας περιγράφει την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να βρεθεί το στοιχειώδες σωματίδιο, m, στη γειτονιά του σημείου $\bar{r}$, τη χρονική στιγμή, t, η $\psi(\bar{r},t)$ ονομάζεται κυματοσυνάρτηση. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα $p(\bar{r},t) = |\psi(\bar{r},t)|^2$ και ισχύει ότι:

$$\int p(\bar{r},t)\,dv = \int |\psi|^2\,dv = 1$$

Αυτή είναι η συνθήκη κανονικοποίησης.

Αντιστοιχία με την Κλασική Μηχανική

Κλασική Μηχανική	Κβαντική Μηχανική
Τροχιά, $\bar{r} = \bar{r}(t)$	Κυματοσυνάρτηση, $\psi(\bar{r},t)$
Εξίσωση Νεύτωνα ($2^{ος}$ N.N.):	Εξίσωση Schrödinger:
$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(\bar{r}) = -\bar{\nabla} V(\bar{r})$	$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar}{2m}\bar{\nabla}^2 + V\right)\psi$

- Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται σε 3 μεγάλες κατηγορίες:

ΜΔΕ
- → Ελλειπτικού τύπου ($\bar{\nabla}^2\psi = 0$) (συνοριακές συνθήκες σε όλο το χωρίο)
  (εξίσωση θερμότητας)
- → Παραβολικού τύπου ($\psi_t = c\bar{\nabla}^2\psi$) (και αρχική και συνοριακές συνθήκες)
  (κυματικές μορφές)
- → Υπερβολικού τύπου ($\psi_{tt} = \psi_{xx}$) → $\psi(x+t) + \psi(x-t)$ (μόνο μια αρχική συνθήκη)

⇒ Για να προσδιορίσουμε πλήρως την λύση της εξίσωσης S χρειαζόμαστε μια αρχική συνθήκη, $\psi(\bar{r},0) = \psi_0(\bar{r})$, και συνοριακές συνθήκες:

$\lim_{r\to\infty} \psi(\bar{r},t) =$ πεπερασμένη.

Συνήθως, λόγω φυσικών απαιτήσεων: $\lim_{r\to\infty} \psi(\bar{r},t) = 0$.

Η λύση της εξίσωσης βασίζεται στη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών.
Δηλαδή, $\psi(\bar{r},t) = \psi(\bar{r})\,T(t)$.

$$i\hbar\psi\dot{T} = (H\psi)\cdot T \Leftrightarrow i\hbar\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{H\psi(\bar{r})}{\psi(\bar{r})} = E,$$

η ισότητα ισχύει μόνο όταν οι λόγοι $\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{H\psi(\bar{r})}{\psi(\bar{r})}$

όπου E η σταθερά χωρισμού και παριστάνει την ενέργεια του στοιχειώδους σωματιδίου.

η T φθίνει εκθετικά με τον χρόνο

Άρα, προκύπτουν οι Σ.Δ. εξισώσεις: ① $i\hbar\dot{T} = E\,T(t) \Rightarrow T(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$

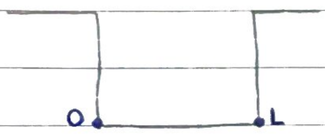
② $H\psi(\bar{r}) = E\psi(\bar{r}) \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\bar{r})\psi = E\psi$
(Πρόβλημα Sturm-Liouville με ιδιοτιμή E)
(τυπική εξίσωση ιδιοτιμών)

Παρατήρηση: Το πρόβλημα ② είναι πλέον ένα τυπικό πρόβλημα Sturm-Liouville και άρα οι λύσεις του αποτελούν ένα πλήρες σύστημα.
Γράφουμε την ΜΔΕ ② στη μορφή:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(\bar{r})]\psi = 0 \Leftrightarrow \nabla^2\psi + [\varepsilon - U(\bar{r})]\psi = 0, \text{ με } \varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2}E,$$

$$U(\bar{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\bar{r}).$$

Έτσι, για το πρόβλημα στη μια διάσταση:
ΣΔΕ: $\psi'' + [\varepsilon - U]\psi = 0$, και θεωρούμε: $U(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<L \\ \infty, & x<0,\ x>L \end{cases}$



με $\psi(0) = \psi(L) = 0$

Δηλαδή, εγκλωβίζουμε το σωματίδιο σ' ένα χωρίο. Τότε:

$$\begin{cases} \psi''(x) + \varepsilon\psi(x) = 0 \\ \psi(0) = \psi(L) = 0 \end{cases}$$

Η λύση της εξίσωσης είναι: $\psi(x) = A\sin(\sqrt{\varepsilon}x) + B\cos(\sqrt{\varepsilon}x)$.
$\psi(0) = 0$, άρα $B = 0$ και $\sin(\sqrt{\varepsilon}L) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ ώστε τελικά

$$\psi_n(x) = c\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού είναι:
Το κβαντικό (στοιχειώδες) σωμάτιο υπάρχει στο μονοδιάστατο χωρίο μόνο αν η ενέργειά του παίρνει μια διακριτή ακολουθία τιμών και καμιά άλλη.
Ονομάζεται κβάντωση της ενέργειας.

$$C: \int_0^L |\psi_n|^2 \, dx = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Άρα, η εξίσωση του κύματος είναι: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Δηλαδή: $\boxed{\psi(x,t) = \psi_n(x)\, T(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{iE}{\hbar}t}}$ (λύση της δ. ε. Schrödinger)